

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.
Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

1 Pour s'échauffer

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules rouges. On fait deux tirages successifs :

- premier tirage : on tire simultanément 2 boules, que l'on met de côté ;
- second tirage : on tire simultanément 2 boules parmi les 8 boules restantes.

On se donne un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) correspondant à cette expérience (on ne cherchera pas à préciser Ω ou \mathbb{P}). Pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, on note B_i l'événement « le premier tirage contient exactement i boules blanches », et C l'événement « le second tirage contient exactement deux boules blanches ».

- 1) Calculer le nombre de façons possibles de tirer simultanément 2 boules (indépendamment de leur couleur) lors du premier tirage.
- 2) Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ et vérifier que $\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = 1$.
- 3) Calculer $\mathbb{P}(C \mid B_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$.
- 4) En déduire $\mathbb{P}(C)$.
- 5) Sachant que les deux boules du second tirage sont blanches, déterminer la probabilité que le premier tirage n'ait contenu aucune boule blanche.
- 6) Si deux événements A et B vérifient $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)$, peut-on dire que A et B sont indépendants ?
On pourra utiliser les questions précédentes.

2 Marche aléatoire sur \mathbb{Z}

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On dit qu'une variable aléatoire Z suit une *loi de Rademacher* si Z est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et si

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, qui suivent toutes la loi de Rademacher. *Note : dire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes revient à dire que pour tout entier $N \geq 2$, les variables aléatoires X_1, \dots, X_N sont indépendantes.*

Suite en page suivante

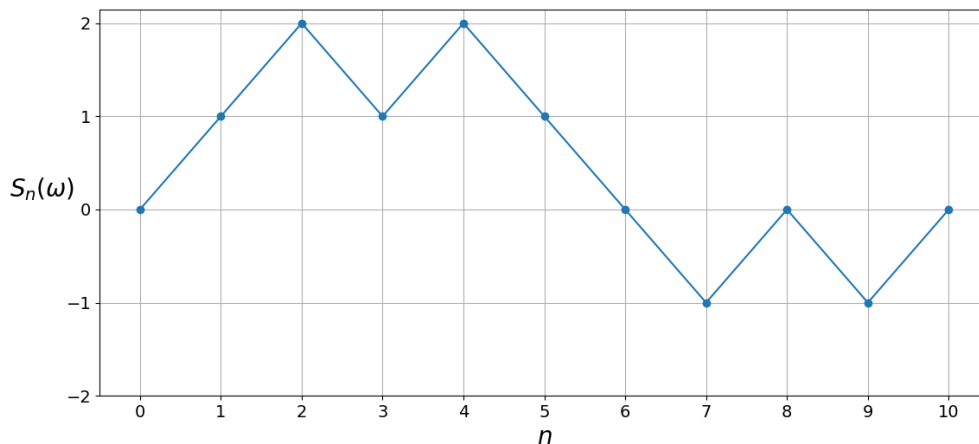


FIGURE 1 – Un exemple où le marcheur arrive en $(10, 0)$ après 10 pas.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

S_n correspond à la position d'un « marcheur aléatoire » à l'instant n : initialement (instant 0), le marcheur est à la position 0, puis à chaque instant $k \geq 1$ il a une chance sur deux de faire un pas dans la direction $-\infty$ ($X_k = -1$) ou dans la direction $+\infty$ ($X_k = +1$). À tout $\omega \in \Omega$, on peut représenter graphiquement la marche aléatoire en représentant les points $(n, S_n(\omega))$, qu'on relie afin de former une ligne brisée (cf Figure 1 ci-après).

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I – Position après n pas

- 1) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathbb{V}(X_i)$.
- 2) En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et de $\mathbb{V}(S_n)$, puis celle de $\mathbb{E}(S_n^2)$.
- 3) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable aléatoire Y_i par $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$. Reconnaitre la loi de Y_i (en justifiant).
- 4) Justifier que la variable aléatoire définie par $D_n = \frac{S_n + n}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
- 5) En utilisant la question précédente, retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et de $\mathbb{V}(S_n)$.
- 6) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Partie II – Loi de S_{2n}

- 7) Justifier que S_{2n} prend uniquement des valeurs paires et est à valeurs dans $\llbracket -2n, 2n \rrbracket$.

8) Montrer que pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n+k}$

9) Montrer que $\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{4^{n-1}} \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{n+k}$.

10) Pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, réécrire le nombre $\binom{2n}{n+k}$ en le mettant sous la forme $a_n b_{n,k}$ avec a_n un entier qui dépend de n et $b_{n,k}$ un coefficient binomial qui dépend de n et de k .

11) En déduire que $\frac{1}{2n} \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On admettra les formules suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{i} = 2^{2n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} = 2^{2n-2}$$

12) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(|S_{2n}|)$ quand n tend vers $+\infty$. On admet que $n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Partie III – Un peu de dénombrement

13) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien de trajets possibles le marcheur aléatoire peut-il emprunter pour relier le point $(0, 0)$ au point $(2n, 2b)$?

Non noté : on suppose qu'un élève a une note en DS qui suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, 20 \rrbracket$. Quel est la probabilité qu'un élève ait 20/20 ? et si l'élève est né un lundi ?